CCP PSI 2005 - Epreuve 1
Durée : 4 heures
calculatrices autorisées

Notations et objectifs.

On note :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes,
- $\mathcal{C}^0$: le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
- $\mathcal{C}_1^0$: le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ des fonctions f 1-périodiques (c'est à dire des fonctions telles que $f(x+1) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Dans tout ce problème, on désigne par θ l'application de $\mathcal{C}^0$ dans $\mathcal{C}^0$, définie par :

pour tout $f \in \mathcal{C}^0$, $\theta(f) = F$ où F est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\int_x^{x+1} f(t)\, dt$.

On admet que θ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction F et de l'endomorphisme θ.

Partie I
Quelques propriétés de $F = \theta(f)$

I.1. **Exemples.**

I.1.1. Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$.

I.1.2. Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^k$ (où k est fixé dans $\mathbb{N}^*$).

I.2. **Variations de $F = \theta(f)$.**
On désigne maintenant par f une fonction arbitraire de $\mathcal{C}^0$.

I.2.1. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F'(x)$ en fonction de f et de x.

I.2.2. Montrer que si la fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $J_{x_0} = [x_0, +\infty[$, alors la fonction F est croissante (respectivement décroissante) sur J_{x_0}.

I.2.3. Montrer que la fonction $F = \theta(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f appartient à $\mathcal{C}_1^0$.

I.2.4. Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

On suppose de nouveau que f désigne une fonction arbitraire de $\mathcal{C}^0$.

I.2.5. On suppose que la fonction f admet une limite L_1 en $+\infty$. Montrer que la fonction F admet une limite L_2 (que l'on explicitera) en $+\infty$; on pourra étudier d'abord le cas où $L_1 = 0$.

I.3. **Propriétés du graphe de F.**
Soient $f \in \mathcal{C}^0$ et $F = \theta(f)$.
On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(u) = F\left(u - \frac{1}{2}\right) = \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} f(t)\, dt$.

I.3.1. Comparer $\psi(-u)$ et $\psi(u)$, si la fonction f est impaire (respectivement paire).

I.3.2. Quelle propriété géométrique de la représentation graphique de la fonction F peut-on déduire des résultats obtenus en **I.3.1**, si la fonction f est impaire (respectivement paire) ?

I.4. **Etude d'un exemple.**
Soit $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kt^2}}{k^2+1}$, pour t réel.

I.4.1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

I.4.2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

I.4.3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?

I.4.4. Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction f (on ne cherchera pas à préciser $f(0)$).

I.4.5. La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

I.4.6. Soit $F = \theta(f)$.

I.4.6.1. Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction F.

I.4.6.2. La fonction F est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
(on pourra comparer $F(x)$ et $f(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}^+$).

Partie II
L'endomorphisme θ

II.1. L'endomorphisme θ est-il surjectif ?

II.2. **Sur le noyau de θ.**
On note désormais $Ker(\theta)$ le noyau de l'endomorphisme θ.

II.2.1. Montrer que : $f \in Ker(\theta) \iff \left(f \in \mathcal{C}_1^0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right)$.

II.2.2. Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}_1^0\right)^2$. On note $< f|g >= \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.
On admettra sans justification, que $< .|. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_1^0$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note c_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $c_k(t) = \cos(2\pi k t)$.

II.2.2.1. Vérifier que c_k appartient à $\mathcal{C}_1^0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et calculer $< c_j|c_k >$ pour tout choix de $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

II.2.2.2. $Ker(\theta)$ est-il de dimension finie ?

II.2.3. Soit $f \in \mathcal{C}_1^0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $\phi_n(x) = \int_n^x f(t)\,dt$ pour $x \in [n, n+1]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $W_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

II.2.3.1. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $W_n = \frac{\phi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\,dt$.

II.2.3.2. Si on suppose que f appartient à $ker(\theta)$, quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} W_n$?

II.2.3.3. Si on suppose que f n'appartient pas à $ker(\theta)$, quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} W_n$?

II.3. **Sur le spectre de θ.**
On note $Sp(\theta)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de l'endomorphisme θ.
Si a est un nombre réel fixé, on note h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(t) = e^{at}$.

II.3.1. Montrer que chaque h_a est un vecteur propre de l'endomorphisme θ.

II.3.2. Etudier les variations de la fonction $u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$.

II.3.3. Expliciter l'ensemble $Sp(\theta) \cap \mathbb{R}^+$.

Partie III

Une suite de fonctions propres de l'endomorphisme θ

Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme θ

On note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ qui est fixée dans toute cette partie.
On suppose $\lambda > 0$.

III.1. Sout $k \in \mathbb{N}^*$. On note I_k l'intervalle $]2k\pi, (2k+1)\pi[$.
On pose, pour tout t de l'intervalle I_k : $g(t) = t\left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right) + \ln\left(\frac{\sin(t)}{\lambda t}\right)$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

III.1.1. Soit ρ la fonction définie sur I_k par : $\rho(t) = t\sin(2t) - t^2 - \sin^2(t)$. Etudier la fonction ρ sur I_k et préciser son signe.

III.1.2. Montrer que g définit une bijection de I_k sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

On se propose de montrer l'existence, dans E_λ, d'une suite (non triviale) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres.

III.2. Soit $\gamma = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

III.2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_x^{x+1} e^{\gamma t}\, dt$.

III.2.2. A quelle condition nécessaire et suffisante la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = e^{at}\cos(bt)$ est-elle un vecteur propre de l'endomorphisme θ associé à la valeur propre λ ?

III.3. En déduire une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres de l'endomorphisme θ.